PROBLEME

Dans le plan orienté, ABC est un triangle tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, la lettre O désigne le centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABC et I est le point d'intersection des bissectrices de ce triangle. Les points P et Q appartiennent respectivement aux demi-droites [CA) et [BA) et vérifient : CP = BQ = BC.

1/a- Montrer que (CI) est la médiatrice de [PB] et que (BI) est la médiatrice de [CQ].

b- Montrer que $\left(\overrightarrow{CP};\overrightarrow{QB}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

2/ Soit f la rotation qui transforme C en Q et P en B

a- Montrer que f a pour centre I et que $\frac{2\pi}{3}$ est une mesure de son angle.

b- Montrer que $\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

c- Montrer que les points I, P et Q sont alignés.(on pourra calculer $\left(\overrightarrow{IP};\overrightarrow{IQ}\right)$).

3/ On pose $O_1 = f(O)$ et $O_2 = f(O_1)$

a- Montrer que $f(O_2) = O$

b- En déduire que le triangle OO_1O_2 est équilatéral et que (OI) est la médiatrice du segment $[O_1O_2]$.

4/ Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $g = f \circ r \circ f$.

a- Montrer que g est une translation.
vérifier que $g(O_2) = O_1$. En déduire le vecteur de translation

b- Montrer que r(B) = C. En déduire que g(P) = Q.

c- Montrer alors que les droites (OI) et (PQ) sont perpendiculaires.

5/ Soit s la similitude directe de centre O et qui transforme I en O_1.

a- Montrer que $\sqrt{3}$ est le rapport de s et que $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ est une mesure de son angle.

b- Montrer que pour tout point M du plan distinct de O, d'image M' par s, le triangle OMM'est isocèle de sommet M. (on pourra utiliser les relations d'El Kashi).

c- Construire les points B' et C' images respectives de B et C par s.

UNE CORRECTION POSSIBLE